$\boxed{1}$

(1)

略解

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=p$ （$a,b>0$ より，p は 0 でない有理数）とおくと，$\sqrt{a}=p-\sqrt{b}$

この両辺を 2 乗すると，$a=\left(p-\sqrt{b}\right)^2$　$\therefore a=p^2-2p\sqrt{b}+b$　$\therefore \sqrt{b}=\dfrac{p^2+b-a}{2p}$

右辺の p^2+b-a は有理数，$2p$ は 0 でない有理数だから，$\sqrt{b}$ は有理数である。

$\sqrt{a}$ についても同様にすると，$\sqrt{a}=\dfrac{p^2+a-b}{2p}$ より，有理数である。

ゆえに，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a},\sqrt{b}$ はともに有理数である。

(2)

略解

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=q$ （$a,b,c>0$ より，q は 0 でない有理数）とおくと，

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=q-\sqrt{c}$　・・・①

この両辺を 2 乗すると，$a+b+2\sqrt{ab}=q^2-2q\sqrt{c}+c$　$\therefore \sqrt{ab}+q\sqrt{c}=\dfrac{q^2+c-a-b}{2}$

よって，$\sqrt{\dfrac{ab}{q^2}}+\sqrt{c}=\dfrac{q^2+c-a-b}{2q}$

右辺の $q^2+c-a-b$ は有理数，$2q$ は 0 でない有理数だから，左辺は有理数である。

よって，(1)より，$\sqrt{c}$ は有理数であり，これより，①の左辺も有理数である。

ゆえに，(1)より，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ はともに有理数であり，

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ はすべて有理数である。

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=q-\sqrt{c}$

$\boxed{2}$

$$\sum_{k=1}^{12n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{12}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{12n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n-1}\cos\frac{k\pi}{6}$$

$$=\frac{12n-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}-\cos\frac{12n\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{12n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}-\frac{1}{2}$$

$$=6n-1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12}{6}\pi\right)+\cdots$$

$$+\left(\cos\frac{12m-11}{6}\pi+\cos\frac{12m-10}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12m}{6}\pi\right)+\cdots$$

$$+\left(\cos\frac{12n-11}{6}\pi+\cos\frac{12n-10}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12n}{6}\pi\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\cos\frac{12m-11}{6}\pi+\cos\frac{12m-10}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12m}{6}\pi\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left[\cos\left\{2(m-1)+\frac{\pi}{6}\right\}+\cos\left\{2(m-1)+\frac{2}{6}\pi\right\}+\cdots+\cos\left\{2(m-1)+\frac{12}{6}\pi\right\}\right]$$

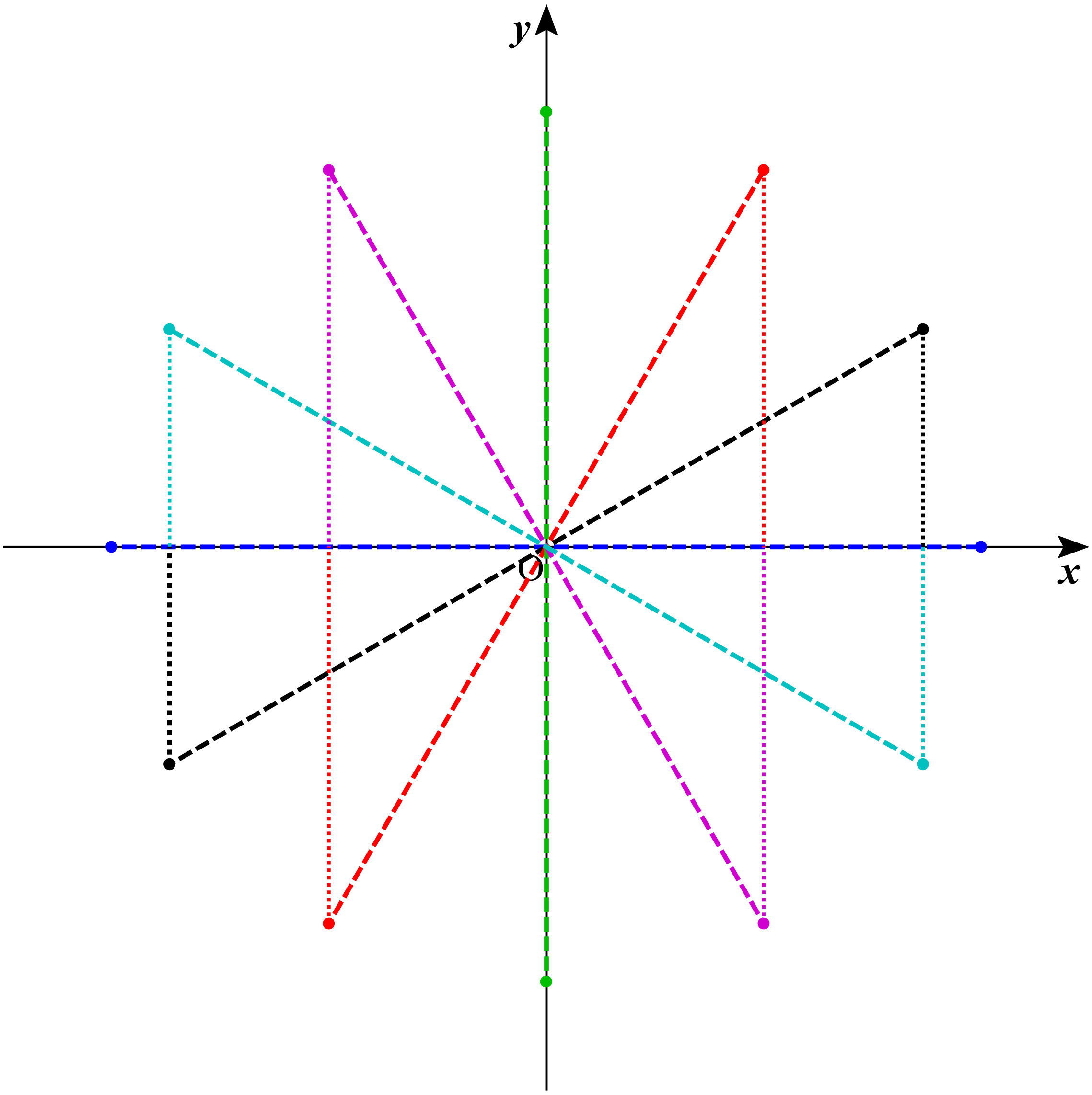
$$=0$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{12n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{12}\right)^2=6n-1\quad\cdot\cdot\cdot(\text{答})$$

原点に関して対称な点が 6 組できるので，

$$\cos\left\{2(m-1)+\frac{\pi}{6}\right\}+\cos\left\{2(m-1)+\frac{2}{6}\pi\right\}+\cdots+\cos\left\{2(m-1)+\frac{12}{6}\pi\right\}=0$$



補足

積和の公式を利用した $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}$ の求め方

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cdot S_n &= \sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}\cdot\sin\alpha\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n}\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{k\pi}{6}-\alpha\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left[\left\{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right\}+\cdots\right.\\
&\qquad+\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{k\pi}{6}-\alpha\right)\right\}+\left\{\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{6}-\alpha\right)\right\}+\cdots\\
&\qquad\left.+\left\{\sin\left(\frac{12n\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{12\pi}{6}-\alpha\right)\right\}\right]
\end{aligned}
$$

ここで，$\dfrac{k\pi}{6}-\alpha=\dfrac{(k+1)}{6}+\alpha$ とすると，$\alpha=-\dfrac{\pi}{12}$　・・・①

また，$\sin\alpha\cdot S_n=\dfrac{1}{2}\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{12n\pi}{6}-\alpha\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\alpha\right\}$　・・・②

①，②より，

$$
\begin{aligned}
-\sin\frac{\pi}{12}\cdot S_n &= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\\
&=0
\end{aligned}
$$

これと $\sin\dfrac{\pi}{12}\neq 0$ より，$S_n=0$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}=0$

$\boxed{3}$

(1)

$f(x)=1+\dfrac{1}{p}x-(1+x)^{\frac{1}{p}}$ とおくと，p は2以上の自然数，x は正数だから，

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}(1+x)^{\frac{1}{p}-1}\\
&=\frac{1}{p}\left\{1-(1+x)^{\frac{1}{p}-1}\right\}\\
&=\frac{1}{p}\left\{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right\}>0
\end{aligned}
$$

よって，$f(x)$ は単調増加しかつ $f(0)=0$ より，$f(x)>0$

ゆえに，$(1+x)^{\frac{1}{p}}<1+\dfrac{1}{p}x$　・・・①

$g(x)=(1+x)^{\frac{1}{p}}-\left\{1+\dfrac{1}{p}x+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p}-1\right)x^2\right\}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=\frac{1}{p}(1+x)^{\frac{1}{p}-1}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)x\\
&=\frac{1}{p}\left\{(1+x)^{\frac{1}{p}-1}-\left(\frac{1}{p}-1\right)x-1\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g''(x)&=\frac{1}{p}\left\{\left(\frac{1}{p}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{p}-2}-\left(\frac{1}{p}-1\right)\right\}\\
&=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left\{(1+x)^{\frac{1}{p}-2}-1\right\}\\
&=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left\{\left(\frac{1}{1+x}\right)^{2-\frac{1}{p}}-1\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，p は2以上の自然数，x は正数だから，$\dfrac{1}{p}-1<0$，$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{2-\frac{1}{p}}-1<0$　$\therefore g''(x)>0$

これより，$g'(x)$ は単調増加しかつ $g'(0)=0$ より，$g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は単調増加しかつ $g(0)=0$ より，$g(x)>0$

$\therefore 1+\dfrac{1}{p}x+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p}-1\right)x^2<(1+x)^{\frac{1}{p}}$　・・・②

①，②より，$1+\dfrac{1}{p}x+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p}-1\right)x^2<(1+x)^{\frac{1}{p}}<1+\dfrac{1}{p}x$

(2)

$$\left(n^3+n^2\right)^{\frac{1}{3}}=\left\{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ここで $1+\frac{1}{p}x+\frac{1}{2}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)x^2<(1+x)^{\frac{1}{p}}<1+\frac{1}{p}x$ に $x=\frac{1}{n}$， $p=3$ を代入し，整理すると，

$$1+\frac{1}{3n}-\frac{1}{9n^2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}<1+\frac{1}{3n}$$

$$\therefore n\left(1+\frac{1}{3n}-\frac{1}{9n^2}\right)<n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}<n\left(1+\frac{1}{3n}\right)$$

$$\therefore n+\frac{1}{3}-\frac{1}{9n}<n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}<n+\frac{1}{3} \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

$$\left(n^5+n^4\right)^{\frac{1}{5}}=\left\{n^5\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}$$
$$=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

ここで $1+\frac{1}{p}x+\frac{1}{2}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)x^2<(1+x)^{\frac{1}{p}}<1+\frac{1}{p}x$ に $x=\frac{1}{n}$， $p=5$ を代入し，整理すると，

$$1+\frac{1}{5n}-\frac{2}{25n^2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}<1+\frac{1}{5n}$$

$$\therefore n\left(1+\frac{1}{5n}-\frac{2}{25n^2}\right)<n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}<n\left(1+\frac{1}{5n}\right)$$

$$\therefore n+\frac{1}{5}-\frac{2}{25n}<n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}<n+\frac{1}{5}$$

$$\therefore -\left(n+\frac{1}{5}\right)<-n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}<-\left(n+\frac{1}{5}-\frac{2}{25n}\right) \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

③＋④より，

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{9n}<n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}-n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}<\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{2}{25n}$$

$$\therefore \frac{2}{15}-\frac{1}{9n}<\left(n^3+n^2\right)^{\frac{1}{3}}-\left(n^5+n^4\right)^{\frac{1}{5}}<\frac{2}{15}+\frac{2}{25n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{9n}\right)=\frac{2}{15}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{25n}\right)=\frac{2}{15}$

よって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(n^3+n^2\right)^{\frac{1}{3}}-\left(n^5+n^4\right)^{\frac{1}{5}}\right\}=\frac{2}{15}$　・・・(答)

補足

$$(1+x)^{\frac{1}{p}}\approx 1+\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1}\frac{1}{p^k}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\cdots\left\{\frac{1}{p}-(k-1)\right\}x^k\right]$$

$\boxed{4}$

(1)

$x+\sqrt{1+x^2}=a$ と $1+x^2=(a-x)^2$ かつ $a-x\geq 0$ は同値だから，

$1+x^2=(a-x)^2$ かつ $a-x\geq 0$ を解けばよい。

$1+x^2=(a-x)^2$ より，$1+x^2=a^2-2ax+x^2$　$\therefore 2ax=a^2-1$

ここで，$a=0$ とすると，$2ax=a^2-1$ が成り立たないから，$a\neq 0$

よって，$x=\dfrac{a^2-1}{2a}$　・・・①

$a\neq 0$ より，$a-x>0$

これと①より，$a-\dfrac{a^2-1}{2a}=\dfrac{a^2+1}{2a}>0$　$\therefore a>0$　・・・②

①かつ②より，$x=\dfrac{a^2-1}{2a}$，$a>0$　・・・(答)

(2)

$y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ について，

$$y'=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$$

より，

$y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ は単調増加する。

また，$y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ と y 軸（$x=0$）との交点の y 座標は，

$y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ に $x=0$ を代入することにより，$y=0$

これより，回転体の体積を V とすると，$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dy$

ここで，$y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ より，$x+\sqrt{1+x^2}=e^y>0$

よって，(1)より， $x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^{y}}=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

$$\therefore V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dy$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(e^{2y}+e^{-2y}-2\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2y}}{2}-\frac{e^{-2y}}{2}-2y\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2}-1\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(e-\frac{1}{e}-2\right)$$ ・・・(答)